**Elementare Analysis**

**Folgen und Konvergenz**

Eine Folge (an) ist eine Abbildung, die jedem n ∈ **N** oder n ∈ **N**0 ein Folgenglied an zuweist.

Explizite Definition:  
 Folge der Quadratzahlen: (an): an = n2

Rekursive Definition:  
 Fibonacci-Folge: (bn): b1 = 1, b2 = 1, bn+1 = bn + bn−1

Arithmetische Folge: Abstand der Folgenglieder konstant (an+1 – an = d und an = a0 + n\*d)

Geometrische Folge: Quotient der Folgenglieder konstant (an+1/an = q und an = a0 \* qn)

Beschränkte Folgen  
 Eine Folge (an) ist beschränkt, wenn es eine Schranke r > 0 gibt, so dass |an| ≤ r für alle n ∈ **N**

Monotonie

monoton wachsend, wenn an+1 ≥ an für alle n ∈ **N**

monoton fallend, wenn an+1 ≤ an für alle n ∈ **N**

streng monoton, wenn jeweils an+1 > an oder an+1 < an

Konvergenz/Divergenz

Eine Folge (an) ist konvergent zum Grenzwert a, wenn es zu jeder Zahl ε > 0 ein N ∈ **N** gibt, so dass |an − a| < ε für jedes n > N. Dies wird dann an → a, an (n→∞) → a oder lim(n→∞) an = a geschrieben. Gibt es keinen solchen Grenzwert, so ist die Folge divergent.

Stetige Funktionen

Eine Funktion f : A → B ist im Punkt z ∈ A stetig, wenn für alle Folgen (xn) mit Werten aus A mit xn → z gilt, dass lim (n→∞) f(xn) = lim (x→z) f(x) = f(z). Die Funktion ist stetig, wenn sie auf allen Punkten ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Zwischenwertsatz

Die stetige Funktion f : [a, b] → R nimmt in dem abgeschlossenen Intervall [a, b] ihr Maximum und Minimum an den Stellen x+ und x− an, und für jeden Wert y ∈ [f(x−), f(x+)] gibt es ein x ∈ [a, b], so dass f(x) = y

Ein Bild, das Text enthält.

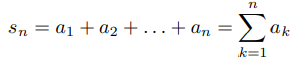
Automatisch generierte Beschreibung

Rechenregeln

**Reihen**

Definition

Eine Reihe ist die Folge (sn) von Partialsummen



Konvergenz/Divergenz

Konvergiert die Folge (sn) zu einem Reihenwert s, so ist die Reihe konvergent, sonst divergent.

Arithmetische Reihe

Für die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe (an) mit an = a1 + (n − 1) · d gilt

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Geometrische Reihe

Für beliebiges q ∈ *C* gilt die geometrische Summenformel

Ein Bild, das Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

(für |q| < 1 konvergiert die geometrische Reihe zum Wert 1/(1-q), für |q| > 1 divergiert sie)

Allgemeine harmonische Reihe Exponentialreihe

Ein Bild, das Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

(konvergiert für α > 1 und divergiert für 0 ≤ α ≤ 1)

Majoranten- und Minorantenkriterium

 Konvergiert die Reihe  und gilt |bk| ≤ ak für alle k ab einem n, so konvergiert

Divergiert die Reihe  und gilt 0 ≤ ak ≤ bk für alle k ab einem n, so divergiert 

Quotientenkriterium

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung Existiert der Grenzwert …

… und ist < 1 konvergiert die Reihe.

… und ist > 1 divergiert die Reihe

Wurzelkriterium

 Existiert der Grenzwert …

… und ist < 1 konvergiert die Reihe.

… und ist > 1 divergiert die Reihe.

**Potenzreihen**

Eine Potenzreihe mit Koeffizienten (ak) und Entwicklungspunkt x0 ∈ *C* ist eine Reihe

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Konvergenz/Divergenz

Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x0 konvergiert im Inneren eines Kreises mit Konvergenzradius r ≥ 0

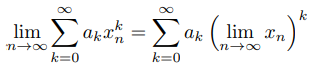


Und divergiert außerhalb

Stetigkeit

Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradius stetig

Deshalb darf man auch Grenzwerte nach Definition der Stetigkeit innerhalb des Konvergenzkreises in eine Potenzreihe hinein- oder herausziehen:



Identische Potenzreihen

Stimmen zwei Potenzreihen mit gleichem Entwicklungspunkt x0 auf einem Kreis mit Radius r > 0 überein, d.h. Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

so sind die Potenzreihen identisch, d.h. ak = bk für k = *N*0.

Exponentialfunktion

exp : *C* → *C* (auch e x = exp(x)) ist durch folgende Reihe definiert

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Eulersche Formel

